Φ.27 Δείξετε ότι, για ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_0, το οποίο κινείται με ταχύτητα υ και έχει ορμή p και κινητική ενέργεια K, ισχύει η σχέση

$$\frac{p\upsilon}{K} = 1 + \frac{1}{1 + K/m_0c^2}$$

ΛΥΣΗ

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι $K = m_0c^2(\gamma - 1)$ (1)

και η ορμή του $p = m_0\gamma\upsilon$. (2)

Η Εξ. (1) δίνει

$$\gamma = 1 + \frac{K}{m_0c^2} \qquad \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = \frac{1}{\left(1 + K/m_0c^2\right)^2} \qquad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\left(1 + K/m_0c^2\right)^2}$$

Από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{p\upsilon}{K} = \frac{m_0\gamma\upsilon^2}{m_0c^2(\gamma - 1)} = \frac{\beta^2}{1 - 1/\gamma}$$

Αντικαθιστώντας για τα β και γ,

$$\frac{p\upsilon}{K} = \left(1 - \frac{1}{\left(1 + K/m_0c^2\right)^2}\right)\left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + K/m_0c^2}}\right) =$$

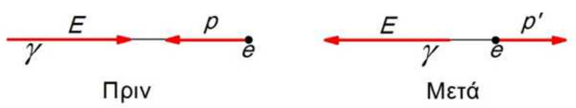
$$= \left(\frac{2K/m_0c^2 + \left(K/m_0c^2\right)^2}{\left(1 + K/m_0c^2\right)^2}\right)\left(\frac{1 + K/m_0c^2}{K/m_0c^2}\right)$$

και, τελικά,

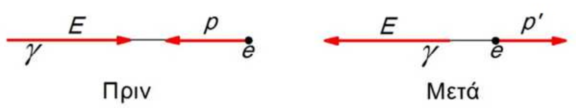
$$\frac{p\upsilon}{K} = \frac{2 + K/m_0c^2}{1 + K/m_0c^2} = 1 + \frac{1}{1 + K/m_0c^2}$$

Φ.18 Ένα φωτόνιο με ενέργεια E, συγκρούεται με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από τη δική του. Μετά την κρούση το φωτόνιο εξακολουθεί να έχει ενέργεια E και κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Δείξετε ότι, για να συμβεί αυτό, το ηλεκτρόνιο πρέπει να έχει αρχικά ορμή με μέτρο ίσο με E/c. Να δειχθεί επίσης ότι η τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι $\upsilon = c\Big/\sqrt{1+\left(m_0c^2/E\right)^2}$, όπου m_0c^2 είναι η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου.

ΛΥΣΗ



Η σύγκρουση φαίνεται στο σχήμα. E είναι η ενέργεια του φωτονίου και p και p' είναι η ορμή και $E_{\rm e}$ και $E'_{\rm e}$ η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου προ και μετά τη σύγκρουση, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Οι αρχές της διατήρησης δίνουν:

Ενέργεια: $E + E_{\rm e} = E + E'_{\rm e}$ (1)

Ορμή: $\dfrac{E}{c} - p = -\dfrac{E}{c} + p'$ (2)

όπου τα p και p' έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Από την Εξ. (1) προκύπτει ότι $E_{\rm e} = E'_{\rm e}$ και, κατά συνέπεια, και $|p| = |p'|$.

Η ολική ορμή του συστήματος είναι, επομένως, ίση με μηδέν. Με αυτά τα δεδομένα, η Εξ. (2) δίνει

$$\frac{E}{c} = p \qquad \text{ή} \qquad m_0c^2\beta\gamma = E \qquad \text{και} \qquad \left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2\gamma^2} = \frac{1}{\beta^2}\left(1-\beta^2\right)$$

Επομένως,

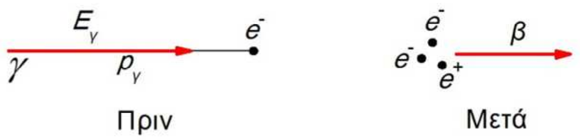
$$1+\left(\frac{m_0c^2}{E}\right)^2=\frac{1}{\beta^2} \qquad \text{ή} \qquad \beta=\frac{1}{\sqrt{1+\left(m_0c^2/E\right)^2}}$$

και, τελικά,

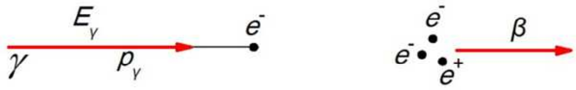
$$\upsilon=\frac{c}{\sqrt{1+\left(m_0c^2/E\right)^2}}$$

Φ.20 Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή ποζιτρονίου (e^+) κατά τη σύγκρουση ενός φωτονίου, γ, με ακίνητο ηλεκτρόνιο, στην αντίδραση $\gamma+e^-\rightarrow e^-+e^-+e^+$;
(Δίνεται, για τα e^- και e^+, $m_ec^2=0,511\ \text{MeV}$).

ΛΥΣΗ



Για διαθέσιμη ενέργεια ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που παράγονται θα είναι ακίνητα στο σύστημα μηδενικής ορμής. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, επομένως, όλα τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έστω βc , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Πριν Μετά

Από τις αρχές διατήρησης, έχουμε:

Ενέργεια: $E_\gamma + m_e c^2 = 3 m_e c^2 \gamma$ (1)

Ορμή: $\dfrac{E_\gamma}{c} = 3 m_e c \gamma \beta$ (2)

Αντικαθιστώντας για την από την Εξ. (2) στην (1), έχουμε

$$3 m_e c^2 \beta \gamma + m_e c^2 = 3 m_e c^2 \gamma$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$3\beta\gamma + 1 = 3\gamma \qquad 3(1-\beta)\gamma = 1 \qquad \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{3} \qquad 9(1-\beta) = 1+\beta$$

Επομένως, $\beta = \dfrac{4}{5}$ και $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{5}{3}$.

Η Εξ. (2) δίνει $E_\gamma = 3 m_e c^2 \gamma \beta = 3 m_e c^2 \dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{3}$ ή $E_\gamma = 4 m_e c^2$.

Αντικαθιστώντας $m_e c^2 = 0,511\ \text{MeV}$ στην $E_\gamma = 4 m_e c^2$,

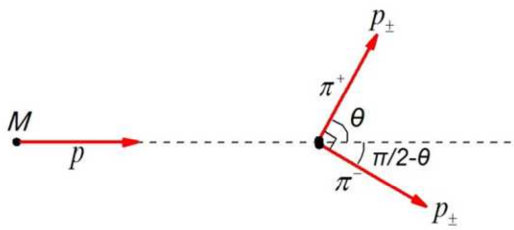
βρίσκουμε για την ενέργεια κατωφλίου του φωτονίου την τιμή

$$E_\gamma = 2,044\ \text{MeV}$$

Φ.14 Ένα σωματίδιο διασπάται παράγοντας ένα π^+ και ένα π^-. Και τα δύο πιόνια έχουν ορμή ίση με 530 MeV/c και κινούνται σε κατευθύνσεις που είναι κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί η μάζα ηρεμίας του αρχικού σωματιδίου. Δίνεται η μάζα ηρεμίας των $\pi^\pm$ ίση με 139 MeV/c^2.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το προσπίπτον σωματίδιο έχει μάζα ηρεμίας M, ενέργεια E και ορμή p. Τα δύο πιόνια, π^+ και π^-, που παράγονται, έχουν ορμές που είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν το ίδιο μέτρο, $p_\pm$.



Αφού έχουν την ίδια μάζα ηρεμίας, θα έχουν και την ίδια ολική ενέργεια, $E_\pm$

Διατήρηση της ενέργειας: $$E = E_\pm + E_\pm = 2E_\pm \qquad (1)$$

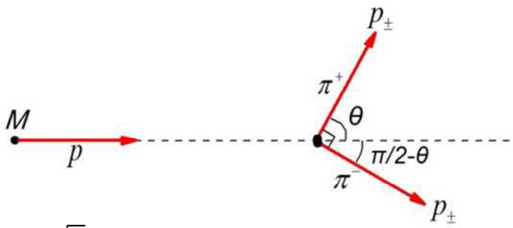
Διατήρηση της ορμής y: $$p_\pm \sin\theta = p_\pm \sin(\pi/2-\theta) = p_\pm \cos\theta \qquad (2)$$

Διατήρηση της ορμής x: $$p = p_\pm(\cos\theta + \sin\theta) \qquad (3)$$

Δίνονται: $p_\pm = 530$ MeV/c και $m_\pm = 139$ MeV/c^2.

Επομένως, $$E_\pm = \sqrt{(m_\pm c^2)^2 + (p_\pm c)^2} = \sqrt{139^2 + 530^2} = 548 \text{ MeV}$$

και $E = 2E_\pm = 1096$ MeV.



Η Εξ. (2) δίνει $\sin\theta = \cos\theta$,

οπότε $\theta = 45^\circ$

και $\sin\theta = \cos\theta = \sqrt{2}/2$.

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (3), $p = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} p_\pm = 750$ MeV/c .

Τελικά,

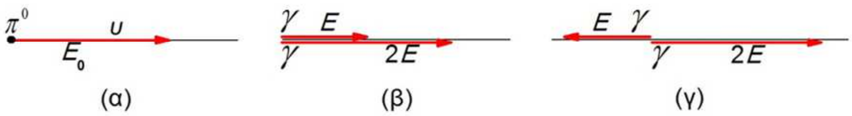
$$Mc^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2} = \sqrt{1096^2 - 750^2} = 799 \text{ MeV}$$

και $M = 799$ MeV/c^2 .

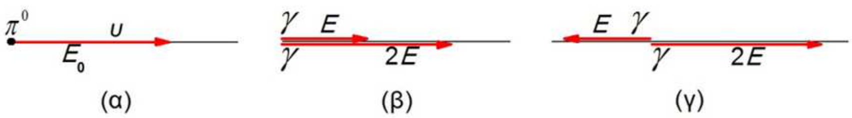
Φ.15 Ένα ουδέτερο πιόνιο διασπάται σε δύο φωτόνια που κινούνται πάνω σε κοινή ευθεία. Το ένα φωτόνιο έχει διπλάσια ενέργεια από το άλλο. Δείξετε ότι η αρχική ταχύτητα του πιονίου ήταν $c/3$.

ΛΥΣΗ

Θα θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα του πιονίου είναι υ και η ολική του ενέργεια [Σχ. (α)]. Δεδομένου ότι τα δύο φωτόνια κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και έχουν διαφορετικές ενέργειες (και) και ορμές (και), για να διατηρείται η ορμή στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην κατεύθυνση κίνησης του πιονίου, θα πρέπει οι εγκάρσιες ορμές των φωτονίων να είναι ίσες με μηδέν. Έτσι, τα δύο φωτόνια θα πρέπει να κινούνται πάνω στην ευθεία κίνησης του πιονίου.



Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις,
1. την περίπτωση κατά την οποία τα δύο φωτόνια κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση [Σχ. (β)] και
2. την περίπτωση κατά την οποία τα δύο φωτόνια κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις [Σχ. (γ)].



(α) Με αναφορά στα σχήματα (α) και (β), οι αρχές της διατήρησης δίνουν:

Διατήρηση της ενέργειας: $$E_0 = E + 2E = 3E \qquad (1)$$

Διατήρηση της ορμής: $$m_0\gamma\upsilon = \frac{E}{c} + \frac{2E}{c} = \frac{3E}{c} \qquad (2)$$

Επομένως, από την Εξ. (2) $$m_0 c^2 \gamma\beta = 3E \qquad (3)$$

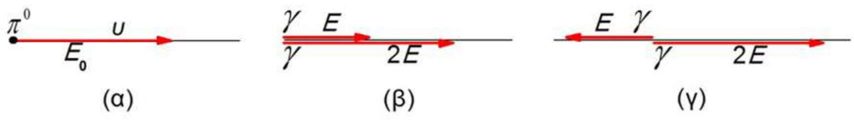
Όμως, $$3E = E_0 = m_0 c^2 \gamma \qquad (4)$$

Κ. Χριστοδουλίδης: Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Οι Εξ. (3) και (4) δίνουν $\beta = 1$

που είναι αδύνατο για πιόνιο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα φωτόνια δεν μπορούν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

(β) Για να είναι η τελική ορμή στην ίδια κατεύθυνση με την αρχική, του πιονίου, το φωτόνιο με τη μεγαλύτερη ενέργεια, $2E$, που έχει και τη μεγαλύτερη ορμή, πρέπει να κινείται προς την κατεύθυνση κίνησης του πιονίου. Τα φωτόνια πρέπει, επομένως, να έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα (γ).



Με αναφορά στα σχήματα (α) και (γ), οι αρχές της διατήρησης δίνουν:

Διατήρηση της ενέργειας: $E_0 = E + 2E = 3E$ (5)

Διατήρηση της ορμής: $m_0 \gamma \upsilon = \frac{2E}{c} - \frac{E}{c} = \frac{E}{c}$ (6)

Επομένως, από την Εξ. (6) $m_0 c^2 \gamma \beta = E$ (7)

Όμως, $E = \frac{1}{3} E_0 = \frac{1}{3} m_0 c^2 \gamma$ (8)

Οι Εξ. (7) και (8) δίνουν $\beta = \frac{1}{3}$ και $\upsilon = c/3$

Φ.26 (α) Πόση είναι η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για το ισότοπο ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$; (β) Ένας πυρήνας ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ διασπάται σε 3 σωματίδια α (πυρήνες του ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$). Εκλύεται ή απορροφάται ενέργεια, και πόση; Δίνονται οι μάζες: του ατόμου του ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, που είναι $m_{\mathrm{C}} = 12\ \mathbf{u}$ ακριβώς, του ατόμου του ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ $m_{\mathrm{He}} = 4,002603\ \mathbf{u}$, του ατόμου του υδρογόνου $m_{\mathrm{H}} = 1,007825\ \mathbf{u}$ και του νετρονίου $m_{\mathrm{n}} = 1,008665\ \mathbf{u}$.

ΛΥΣΗ

(α) Το έλλειμμα μάζας του πυρήνα του ισοτόπου του ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ είναι

$$\Delta M = 6m_{\mathrm{H}} + 6m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{C}} = 6 \times (1,007825 + 1,008665) - 12 = 0,09894\ \mathbf{u}$$

Η ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα είναι:

$$\Delta E = \Delta M\, c^2 = (0,09894\ \mathrm{u}) \times (931,494\ \mathrm{MeV/u}) = 92,162\ \mathrm{MeV}\ ,$$

και η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο είναι:

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{92,162}{12} = 7,68\ \mathrm{MeV/νουκλεόνιο}\,.$$

(β) Θέλουμε να βρούμε το Q (δηλαδή την ενέργεια που εκλύεται) στην αντίδραση ${}^{12}_{6}\mathrm{C} \to 3\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} + Q$.

Η μεταβολή στη μάζα κατά την αντίδραση είναι:

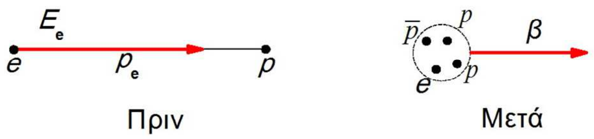
$$\delta M = m_{\mathrm{C}} - 3m_{\mathrm{He}} = 12 - 3 \times 4,002603 = -0,00781\ \mathrm{u}\,.$$

Έτσι, $$Q = (\delta M\,)c^2 = (-0,00781\ \mathrm{u}) \times (931,494\ \mathrm{MeV/u}) = -7,27\ \mathrm{MeV}\ ,$$

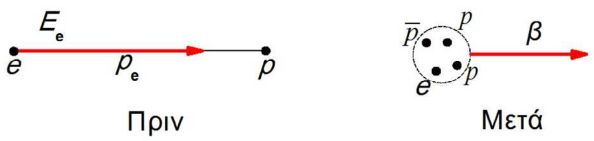
δηλαδή απορροφάται ενέργεια $7,27\ \mathrm{MeV}$.

Φ.23 Ποια είναι η ενέργεια κατωφλίου για την παραγωγή αντιπρωτονίου ($\overline{p}$) κατά τη σύγκρουση ηλεκτρονίου με ακίνητο πρωτόνιο σύμφωνα με την αντίδραση $e+p\rightarrow e+p+p+\overline{p}$; Δίνονται οι ενέργειες ηρεμίας $m_e c^2 = 0,511\ \mathrm{MeV}$ και $m_p c^2 = 938\ \mathrm{MeV}$.

ΛΥΣΗ



Για διαθέσιμη ενέργεια ίση με την ενέργεια κατωφλίου, τα σωματίδια που παράγονται θα είναι ακίνητα στο σύστημα μηδενικής ορμής. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, επομένως, όλα τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, έστω βc , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επομένως, έχουμε:

Διατήρηση της ενέργειας: $$E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}c^2 = \left(3m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}\right)c^2\gamma \qquad (1)$$

Διατήρηση της ορμής: $$p_\mathrm{e}c = \sqrt{E_\mathrm{e}^2 - \left(m_\mathrm{e}c^2\right)^2} = \left(3m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}\right)c^2\beta\gamma \qquad (2)$$

όπου E_e και p_e είναι η ενέργεια και ορμή, αντίστοιχα, του προσπίπτοντος ηλεκτρονίου.
Οι Εξ. (1) και (2) δίνουν

$$E_\mathrm{e}^2 = \left(3m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}\right)^2 c^4\gamma^2 - 2m_\mathrm{p}c^2\left(3m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}\right)c^2\gamma + \left(m_\mathrm{p}c^2\right)^2 =$$
$$= \left(3m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}\right)^2 c^4\beta^2\gamma^2 + \left(m_\mathrm{e}c^2\right)^2$$

Κ. Χριστοδουλίδης: Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

και $\left(3m_p + m_e\right)^2 \gamma^2 \left(1-\beta^2\right) - 2m_p\left(3m_p + m_e\right)\gamma + m_p{}^2 - m_e{}^2 = 0$

Όμως, $\gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$ και έτσι

$$9m_p{}^2 + 6m_e m_p + \cancel{m_e{}^2} - 2m_p\left(3m_p + m_e\right)\gamma + m_p{}^2 - \cancel{m_e{}^2} = 0$$

$$\gamma = \frac{10m_p{}^2 + 6m_e m_p}{2m_p\left(3m_p + m_e\right)} = \frac{5m_p + 3m_e}{3m_p + m_e}$$

Επομένως,

$$E_e = \cancel{\left(3m_p + m_e\right)}\frac{5m_p + 3m_e}{\cancel{3m_p + m_e}}c^2 - m_p c^2 = \left(4m_p + 3m_e\right)c^2$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι:

$$K_e = E_e - m_e c^2 = 2\left(2m_p + m_e\right)c^2$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε την ενέργεια κατωφλίου

$$K_e = 2\left(2\times 938 + 0,511\right) = 3753 \text{ MeV}$$

Φ.25 Η β διάσπαση του ${}^{55}_{24}\mathrm{Cr}$ γίνεται ως εξής: ${}^{55}_{24}\mathrm{Cr} \to {}^{55}_{25}\mathrm{Mn} + \mathrm{e}^-$. Ποια είναι η κινητική ενέργεια που θα δοθεί στο ηλεκτρόνιο, αν οι δύο πυρήνες θεωρούνται ακίνητοι; Δίνονται οι μάζες των *πυρήνων* $M_{\text{Cr-55}} = 54,9279$ u και $M_{\text{Mn-55}} = 54,9244$ u και του ηλεκτρονίου, $m_e = 0,00055$ u .

ΛΥΣΗ

Το έλλειμμα μάζας στην αντίδραση είναι:

$$\Delta M = M_{\text{Cr-55}} - M_{\text{Mn-55}} - m_e = 54,9279 - 54,9244 - 0,0006 = 0,0029 \text{ u}$$

Η μάζα του ηλεκτρονίου πρέπει να συμπεριληφθεί γιατί το ηλεκτρόνιο προέρχεται από τον πυρήνα του ${}^{55}_{24}\mathrm{Cr}$ και οι μάζες που δίνονται είναι αυτές των πυρήνων.

Η ενέργεια που ελευθερώνεται είναι:

$$\Delta E = \Delta M c^2 = (0,0029 \text{ u}) \times (931,494 \text{ MeV/u}) = 2,7 \text{ MeV}$$

και αυτή θα δοθεί στο ηλεκτρόνιο ως κινητική ενέργεια, αφού οι δύο πυρήνες θεωρούνται ακίνητοι.

6.4 *Φωτοσχάση ουρανίου-235.* Φωτόνιο με ενέργεια $E_\phi = 6$ MeV προκαλεί τη σχάση

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \gamma \to {}^{90}_{36}\mathrm{Kr} + {}^{142}_{56}\mathrm{Ba} + 3\,{}^{1}_{0}n\,.$$

Ποια είναι η ολική τελική κινητική ενέργεια K των προϊόντων αυτής της σχάσης;

Δίνονται οι μάζες των ισοτόπων σε μονάδες **u**: $M\left({}^{235}_{92}\mathrm{U}\right) = 235{,}043915$, $M\left({}^{90}_{36}\mathrm{Kr}\right) = 89{,}91972$, $M\left({}^{142}_{56}\mathrm{Ba}\right) = 141{,}91635$, $m_n = 1{,}008665$.

ΛΥΣΗ

Η διατήρηση της μάζας-ενέργειας δίνει:

$$M\left({}^{235}_{92}\mathrm{U}\right)c^2 + E_\phi = \left[M\left({}^{90}_{36}\mathrm{Kr}\right) + M\left({}^{142}_{56}\mathrm{Ba}\right) + 3m_n\right]c^2 + K$$

και

$$K = \left[235{,}043915\,\mathbf{u} - \left(89{,}91972 + 141{,}91635 + 3\times 1{,}008665\right)\mathbf{u}\right]\times$$
$$\times\left(931{,}5\ \mathrm{MeV/u}\right) + 6\ \mathrm{MeV}$$

$$K = 175{,}4\ \mathrm{MeV}\,.$$

Φ.24 Το ισότοπο του ραδίου ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ διασπάται σε ραδόνιο ${}^{222}_{86}\mathbf{Rn}$ εκπέμποντας ένα σωματίδιο α, ως εξής: ${}^{226}_{88}\mathbf{Ra} \to {}^{222}_{86}\mathbf{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Πόση ενέργεια ελευθερώνεται σε αυτή την αντίδραση; Δίνονται οι μάζες των ατόμων: $M_{\mathrm{Ra\text{-}226}} = 226{,}0254$ u, $M_{\mathrm{Rn\text{-}222}} = 222{,}0175$ u και $M_{\mathrm{He\text{-}4}} = 4{,}0026$ u.

ΛΥΣΗ

Το έλλειμμα μάζας στην αντίδραση είναι:

$$\Delta M = M_{\mathrm{Ra\text{-}226}} - M_{\mathrm{Rn\text{-}222}} - M_{\mathrm{He\text{-}4}} = 226{,}0254 - 222{,}0175 - 4{,}0026 = 0{,}0053\ \mathrm{u}$$

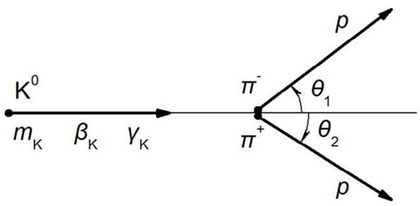
Η ενέργεια που ελευθερώνεται είναι:

$$\Delta E = \Delta M c^2 = (0{,}0053\ \mathrm{u})\times(931{,}494\ \mathrm{MeV/u}) = 4{,}9\ \mathrm{MeV}\,.$$

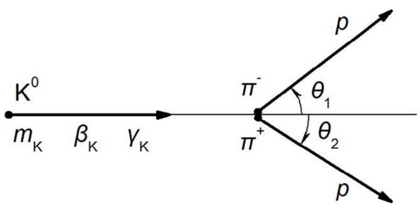
XX.5.31 Σε μια διάσπαση $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$, οι ορμές των παραγόμενων σωματιδίων έχουν και οι δύο μέτρο ίσο με $p_\pi = 300\ \text{MeV}/c$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ίση με 70^o. Ποια είναι η μάζα m του K^0 σε MeV/c^2; Για τα πιόνια είναι $m_\pi c^2 = 140\ \text{MeV}$.

ΛΥΣΗ

Η γεωμετρία της διάσπασης φαίνεται στο σχήμα. Επειδή οι ορμές των δύο παραγόμενων σωματιδίων έχουν ίσα μέτρα, τα δύο πιόνια θα έχουν και ίσες ολικές ενέργειες, έστω E_π. Επίσης, για να διατηρείται (ίση με μηδέν) η εγκάρσια ορμή, θα πρέπει να είναι



$$\theta_1 = \theta_2 = 70^\text{o}/2 = 35^\text{o} \qquad (1)$$



Οι αρχές της διατήρησης δίνουν:

Ενέργεια $\qquad m_\text{K} c^2 \gamma_\text{K} = 2E_\pi \qquad (2)$

Διαμήκης ορμή $\qquad m_\text{K} c \beta_\text{K} \gamma_\text{K} = 2 p_\pi \cos\theta_1 \qquad (3)$

Υψώνοντας τις δύο αυτές εξισώσεις στο τετράγωνο, αφού πολλαπλασιάσουμε την Εξ. (3) επί c, και αφαιρώντας, βρίσκουμε

$$m_\text{K}^2 c^4 \left(1-\beta_\text{K}^2\right)\gamma_\text{K}^2 = 4E_\pi^2 - 4p_\pi^2 c^2 \cos^2\theta_1 = 4\left(m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2 - p_\pi^2 c^2 \cos^2\theta_1\right)$$

$$m_\text{K}^2 c^4 \left(1-\beta_\text{K}^2\right)\gamma_\text{K}^2 = 4\left(m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2 \sin^2\theta_1\right) \qquad (4)$$

Επειδή είναι $\left(1-\beta_{\mathrm{K}}^2\right)\gamma_{\mathrm{K}}^2 = 1$, η τελευταία εξίσωση γράφεται και ως

$$m_{\mathrm{K}}^2 c^4 = 4\left(m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2 \sin^2\theta_1\right)$$

ή

$$m_{\mathrm{K}} c^2 = 2\sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2 \sin^2\theta_1} \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$m_{\mathrm{K}} c^2 = 2\sqrt{139^2 + 300^2 \sin^2 35^{\mathrm{o}}} = 444 \text{ MeV}$$

και

$$m_{\mathrm{K}} = 444 \text{ MeV}/c^2$$

XX.3.5 Δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο στο αδρανειακό σύστημα S. Δείξετε ότι η χρονική σειρά με την οποία συμβαίνουν είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Δείξετε επίσης ότι η χρονική απόσταση μεταξύ τους είναι η ελάχιστη στο σύστημα S.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι συντεταγμένες των δύο γεγονότων στο σύστημα S είναι:

Γεγονός 1: $x_1 = x,\quad y_1 = y,\quad z_1 = z,\quad t_1$

Γεγονός 2: $x_2 = x,\quad y_2 = y,\quad z_2 = z,\quad t_2$

Χωρίς απώλεια στη γενικότητα, θα θεωρήσουμε ότι είναι $t_2 > t_1$, δηλαδή ότι το συμβάν 1 προηγείται του 2 στο σύστημα S. Οι αντίστοιχες συντεταγμένες σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα S΄ είναι:

Γεγονός 1: $x_1' = \gamma\left(x_1 - V t_1\right) = \gamma\left(x - V t_1\right) \qquad t_1' = \gamma\left(t_1 - \dfrac{V}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(t_1 - \dfrac{V}{c^2}x\right)$

Γεγονός 2: $x_2' = \gamma\left(x_2 - V t_2\right) = \gamma\left(x - V t_2\right) \qquad t_1' = \gamma\left(t_1 - \dfrac{V}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(t_1 - \dfrac{V}{c^2}x\right)$

Η διαφορά ανάμεσα στους χρόνους των δύο γεγονότων είναι $t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1\right)$

Επειδή το γ είναι πάντοτε θετικό, αν είναι $t_2 - t_1 > 0$, τότε και $t'_2 - t'_1 > 0$
και η χρονική σειρά με την οποία συμβαίνουν τα δύο γεγονότα είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Επίσης, είναι $\gamma > 1$ και επομένως $\left|t'_2 - t'_1\right| > \left|t_2 - t_1\right|$.
Αυτό σημαίνει ότι η χρονική απόσταση μεταξύ των δύο γεγονότων είναι η ελάχιστη για $\gamma = 1$, δηλαδή στο σύστημα S.

Φ.6 Η μέση διάρκεια ζωής των ακίνητων μιονίων είναι $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s .
Τα μιόνια σε μια δέσμη παρατηρούνται στο εργαστήριο να έχουν μέση διάρκεια ζωής $\tau_{\mathrm{E}} = 1,5 \times 10^{-5}$ s .
Ποια είναι η ταχύτητα των μιονίων της δέσμης;

ΛΥΣΗ

Οι μέσες διάρκειες ζωής των μιονίων στο δικό τους σύστημα αναφοράς και στο σύστημα του εργαστηρίου συνδέονται μέσω της σχέσης $\tau_{\mathrm{E}} = \gamma\tau$, όπου γ είναι ο παράγοντας Λόρεντς που αντιστοιχεί στην ταχύτητα των μιονίων.

Επομένως,

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = \left(\frac{\tau}{\tau_{\mathrm{E}}}\right)^2, \qquad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_{\mathrm{E}}}\right)^2}, \qquad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2,2 \times 10^{-6}}{1,5 \times 10^{-5}}\right)^2} = 0,989$$

και η ταχύτητα των μιονίων είναι $V = 0,989c$

4.3 Ο μέσος χρόνος ζωής των μεσονίων π^+ είναι $\tau_0 = 2,8 \times 10^{-8}$ s (στο δικό τους σύστημα αναφοράς). Μια δέσμη από 10^4 μεσόνια π^+ διανύει μέσα στο εργαστήριο μια διαδρομή μήκους 59,4 m με ταχύτητα $\upsilon = 0,99c$.

(α) Περίπου πόσα μεσόνια θα επιβιώσουν όταν η δέσμη φτάσει στο τέλος της διαδρομής;

(β) Στον ίδιο χρόνο, πόσα μεσόνια θα επιζούσαν αν αυτά παρέμεναν σε ηρεμία;

ΛΥΣΗ

(α) Στο σύστημα του εργαστηρίου, τα μεσόνια διανύουν μια απόσταση 59,4 m με ταχύτητα $\upsilon = 0,99c$. Ο χρόνος που απαιτείται γι αυτό στο σύστημα του εργαστηρίου είναι:

$$t' = \frac{s}{\upsilon} = \frac{59,4}{0,99 \times 3 \times 10^8} = 20 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Στο σύστημα ηρεμίας των σωματιδίων, αυτός ο χρόνος θα φανεί

μικρότερος κατά ένα παράγοντα γ, όπου $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - 0,99^2} = 7,09$

Επομένως, είναι $$t = \frac{t'}{\gamma} = \frac{20 \times 10^{-8}}{7,09} = 2,82 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Έτσι, στο τέλος της διαδρομής θα επιζούν

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau_0} = 10^4 \exp(-2,82 \times 10^{-8} / 2,8 \times 10^{-8}) = 10^4 \mathrm{e}^{-1}$$

$$N \approx 3700 \text{ μεσόνια.}$$

(β) Μετά από χρόνο 20×10^{-8} s , στο σύστημα ηρεμίας των μεσονίων, θα επιζούσαν περίπου

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau_0} = 10^4 \exp(-20 \times 10^{-8} / 2,8 \times 10^{-8}) = 10^4 \mathrm{e}^{-7}$$

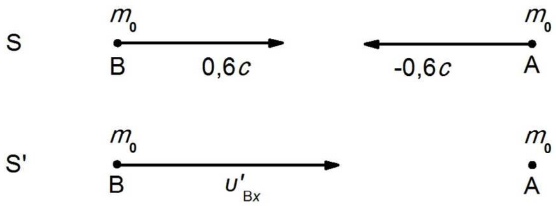
$$N \approx 5 \text{ μεσόνια.}$$

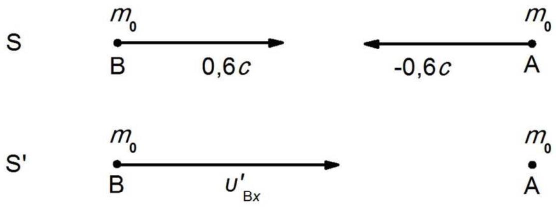
Οι αριθμοί είναι βεβαίως προσεγγιστικοί λόγω της στατιστικής φύσης του φαινομένου, αλλά δείχνουν τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς.

5.4 Δύο σωματίδια, Α και Β, το καθένα από τα οποία έχει μάζα ηρεμίας $m_0 = 1\ \mathrm{GeV}/c^2$ [δηλ. είναι $m_0 c^2 = 1\ \mathrm{GeV}$], κινούνται, στο σύστημα αναφοράς ενός επιταχυντή, πάνω στον άξονα των *x* και σε αντίθετες κατευθύνσεις, πλησιάζοντας το ένα το άλλο. Στο σύστημα του επιταχυντή, το σωματίδιο Α κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{\mathrm{A}x} = -0{,}6\, c$ και το σωματίδιο Β με ταχύτητα $\upsilon_{\mathrm{B}x} = 0{,}6\, c$.

(α) Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου Β στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου Α;

(β) Ποια είναι η ενέργεια και η ορμή (σε GeV/c) του σωματιδίου Β στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου Α;





ΛΥΣΗ

(α) Το σύστημα αναφοράς S΄ του σωματιδίου Α κινείται στο σύστημα S του εργαστηρίου με ταχύτητα $V = \upsilon_{\mathrm{A}x} = -0{,}6\, c$. Στο ίδιο σύστημα, το σωματίδιο Β κινείται με ταχύτητα $\upsilon_{\mathrm{B}x} = 0{,}6\, c$.

Ο μετασχηματισμών των συνιστωσών της ταχύτητας δίνει για την ταχύτητα του Β στο σύστημα S΄:

$$\upsilon'_{\mathrm{B}x} = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}x} - V}{1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}x} V}{c^2}} \qquad \upsilon'_{\mathrm{B}x} = \frac{0{,}6c - (-0{,}6c)}{1 - \dfrac{0{,}6c \times (-0{,}6c)}{c^2}} = \frac{1{,}2}{1{,}36} c = 0{,}88c$$

(β) Στο σύστημα αναφοράς S΄, για $\upsilon'_{\mathrm{B}x} = 0{,}88c$ έχουμε $\beta_{\mathrm{B}} = 0{,}88$ και $\gamma_{\mathrm{B}} = 2{,}11$.

Επομένως, η ενέργεια του Β είναι

$$E'_{\mathrm{B}} = m_0 c^2 \gamma_{\mathrm{B}} = (1\ \mathrm{GeV}/c^2) \times c^2 \times 2{,}11 = 2{,}11\ \mathrm{GeV}$$

και η ορμή του

$$p'_{\mathrm{B}x} = m_0 c \gamma_{\mathrm{B}} \beta_{\mathrm{B}} = (1\ \mathrm{GeV}/c^2) \times c \times 2{,}11 \times 0{,}88 = 1{,}86\ \mathrm{GeV}/c$$

ΧΧ.5.11 Το μήκος κύματος των φωτονίων από κάποιο λέηζερ είναι 633 nm. Ποια είναι η ορμή ενός τέτοιου φωτονίου;

ΛΥΣΗ

Η ορμή ενός φωτονίου δίνεται από τη σχέση , $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{hf}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$

όπου E είναι η ενέργεια του φωτονίου και $h = 4{,}136 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{s}$ είναι η σταθερά του Πλανκ. Επομένως,

$$pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(4{,}136 \times 10^{-15}\right) \times \left(3 \times 10^{8}\right)}{633 \times 10^{-9}} = \frac{4{,}136 \times 3}{6{,}33} = 1{,}96\ \mathrm{eV}$$

και η ορμή του φωτονίου είναι $p = 1{,}96\ \mathrm{eV}/c$.

XX.5.12 Ένα ελατήριο έχει σταθερά $k = 2\times10^4$ N/m . Ποια είναι η αύξηση στη μάζα του αν συμπιεστεί κατά 5 cm;

ΛΥΣΗ

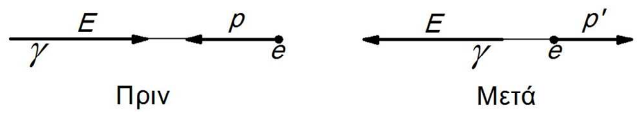
Η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}\times 2\times10^4 \times 0,05^2 = 25 \text{ J}$$

Η αντίστοιχη μεταβολή στη μάζα του ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta m = \Delta U / c^2 = (25 \text{ J})\Big/\left(3\times10^8 \text{ m/s}\right)^2 = 2,8\times10^{-16} \text{ kg}$$

Φ.18 Ένα φωτόνιο με ενέργεια *E*, συγκρούεται με ένα ηλεκτρόνιο που κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από τη δική του. Μετά την κρούση, το φωτόνιο εξακολουθεί να έχει ενέργεια *E* και κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Δείξετε ότι, για να συμβεί αυτό, το ηλεκτρόνιο πρέπει να έχει αρχικά ορμή με μέτρο ίσο με E / c . Δείξετε επίσης ότι η τελική ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι , $\upsilon = c\Big/\sqrt{1+\left(m_0c^2 / E\right)^2}$ όπου m_0c^2 είναι η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου.



ΛΥΣΗ

Η σύγκρουση φαίνεται στο σχήμα. *E* είναι η ενέργεια του φωτονίου και *p* και *p*′ είναι η ορμή και E_e και E'_e η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου προ και μετά τη σύγκρουση, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Οι αρχές της διατήρησης δίνουν:

Ενέργεια: $E + E_e = E + E'_e$ (1)

Ορμή: $\dfrac{E}{c} - p = -\dfrac{E}{c} + p'$ (2)

όπου τα p και p' έχουν τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Από την Εξ. (1) προκύπτει ότι $E_e = E'_e$ και, κατά συνέπεια, και $|p| = |p'|$. Η ολική ορμή του συστήματος είναι, επομένως, ίση με μηδέν. Με αυτά τα δεδομένα, η Εξ. (2) δίνει

$$\frac{E}{c} = p \quad \text{ή} \quad m_0 c^2 \beta\gamma = E \quad \text{και} \quad \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2\gamma^2} = \frac{1}{\beta^2}\left(1-\beta^2\right)$$

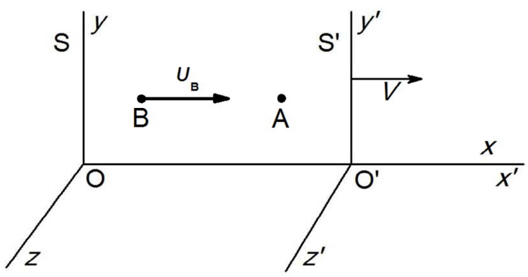
$$1 + \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2} \ , \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(m_0 c^2 / E\right)^2}} \ ,$$

δηλαδή $$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{1+\left(m_0 c^2 / E\right)^2}}$$

XX.5.37 Ένα σωματίδιο, Α, με μάζα ηρεμίας m_A , είναι ακίνητο στο αδρανειακό σύστημα S. Ένα δεύτερο σωματίδιο, Β, με μάζα ηρεμίας m_B , κινείται με ταχύτητα $\upsilon_B \hat{\mathbf{x}}$ μέσα στο σύστημα S. Να υπολογιστεί η ταχύτητα V του συστήματος αναφοράς μηδενικής ορμής των σωματιδίων Α και Β στο σύστημα S.

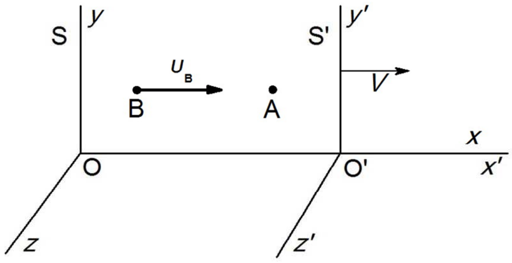
ΛΥΣΗ

Έστω ότι το σύστημα στο οποίο το κέντρο μάζας των δύο σωματιδίων είναι ακίνητο είναι το S΄, το οποίο κινείται με ταχύτητα ως προς το S. Το σύστημα αναφοράς S΄ είναι το σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής των δύο σωματιδίων.



Στο σύστημα αυτό, οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων θα είναι:

$$\boldsymbol{\upsilon}'_{\mathrm{A}} = -V\hat{\mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{\upsilon}'_{\mathrm{B}} = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}} - V}{1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}} V}{c^2}}\hat{\mathbf{x}}$$



Επειδή ο ολική ορμή στο σύστημα αυτό είναι ίση με μηδέν, έχουμε:

$$\mathbf{p}'_{\mathrm{A}} + \mathbf{p}'_{\mathrm{B}} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{\upsilon}'_{\mathrm{A}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon'^2_{\mathrm{A}}}{c^2}}} + \frac{m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\upsilon}'_{\mathrm{B}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon'^2_{\mathrm{B}}}{c^2}}} = 0$$

και επομένως

$$\frac{-m_{\mathrm{A}}V}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} + \frac{m_{\mathrm{B}}(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)}{\left(1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}V}{c^2}\right)\sqrt{1 - \dfrac{(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)^2}{c^2\left(1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}V}{c^2}\right)^2}}} = 0$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{m_{\mathrm{A}}V}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_{\mathrm{B}}(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}V}{c^2}\right)^2 - \dfrac{(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{m_{\mathrm{B}}(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)}{\sqrt{1 - \cancel{2\dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}V}{c^2}} + \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}^2V^2}{c^4} - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}^2}{c^2} + \cancel{2\dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}V}{c^2}} - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_{\mathrm{B}}(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}^2}{c^2}\right)}}$$

και τελικά

$$m_{\mathrm{A}}V = \frac{m_{\mathrm{B}}(\upsilon_{\mathrm{B}} - V)}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}^2}{c^2}}}$$

η οποία μπορεί να λυθεί ως προς V για να δώσει

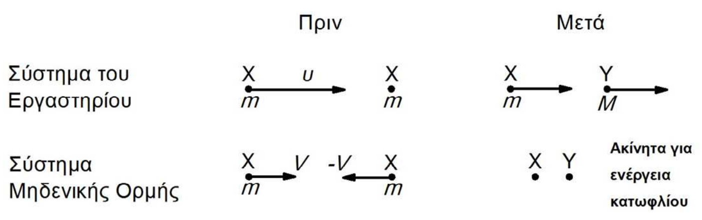
$$V = \frac{\upsilon_{\mathrm{B}}}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}}\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_{\mathrm{B}}^2}{c^2}}}$$

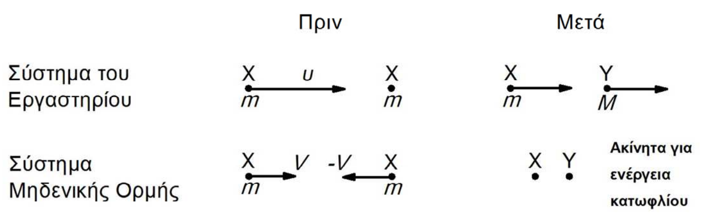
6.8 Στο σύστημα του εργαστηρίου, κινούμενο σωματίδιο X (με μάζα ηρεμίας m), συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο X και το μετατρέπει σε σωματίδιο Y (με μάζα ηρεμίας $M = 3m$), σύμφωνα με την αντίδραση

$$\mathrm{X} + \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y}.$$

Πόση είναι, στο σύστημα του εργαστηρίου, η ενέργεια κατωφλίου (κινητική ενέργεια) του κινούμενου X για να γίνει αυτό;

ΛΥΣΗ





Θα εξετάσουμε την αντίδραση στο Σύστημα Αναφοράς Μηδενικής Ορμής (ΣΑΜΟ). Στο σύστημα αυτό, τα δύο αρχικά σωματίδια X κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες, έστω $\pm V$. Η μέγιστη ενέργεια θα είναι διαθέσιμη για τη δημιουργία του σωματιδίου Y αν τα παραγόμενα X και Y είναι ακίνητα στο σύστημα αυτό. Έτσι και η ορμή παραμένει μηδενική και η διαθέσιμη ενέργεια είναι η μέγιστη δυνατή αφού τα δύο σωματίδια δεν έχουν κινητική ενέργεια. Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα μηδενικής ορμής δίνει

$$2mc^2\gamma = (m+M)c^2 , \quad \text{όπου} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2} .$$

Επομένως $\gamma = \frac{m+M}{2m} = \frac{m+3m}{2m} = 2$ και $V = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Αφού το σωματίδιο, που είναι ακίνητο στο Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου (ΣΑΕ), έχει ταχύτητα $-V$ στο ΣΑΜΟ, προκύπτει ότι το ΣΑΜΟ κινείται με ταχύτητα V ως προς το ΣΑΕ. Άρα η ταχύτητα του αρχικά κινούμενου σωματιδίου Χ στο ΣΑΕ θα πρέπει να είναι

$$\upsilon = \frac{V+V}{1+V^2/c^2} = c\frac{2\times(V/c)}{1+(V/c)^2} = c\frac{\sqrt{3}}{1+3/4}, \qquad \upsilon = \frac{4\sqrt{3}}{7}c$$

Αυτό αντιστοιχεί, στο Σ.τ.Ε. Σε $\beta_{\mathrm{E}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ και $\gamma_{\mathrm{E}} = 7$.

Επομένως, το σωματίδιο Χ κινείται αρχικά με ταχύτητα $\upsilon = \frac{4\sqrt{3}}{7}c$ στο ΣΑΕ ενώ τα παραγόμενα σωματίδια Χ και Υ κινούνται και τα δύο με την ίδια ταχύτητα $V = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Η ενέργεια κατωφλίου του αρχικά κινούμενου σωματιδίου Χ είναι η κινητική ενέργειά του που αντιστοιχεί στην τιμή $\gamma_{\mathrm{E}} = 7$ που βρέθηκε:

$$K = mc^2\left(\gamma_{\mathrm{E}} - 1\right) = 6mc^2$$

Η ολική ενέργεια στο ΣΑΕ είναι

$$E_{o\lambda} = mc^2\gamma_{\mathrm{E}} + mc^2 = 8mc^2$$

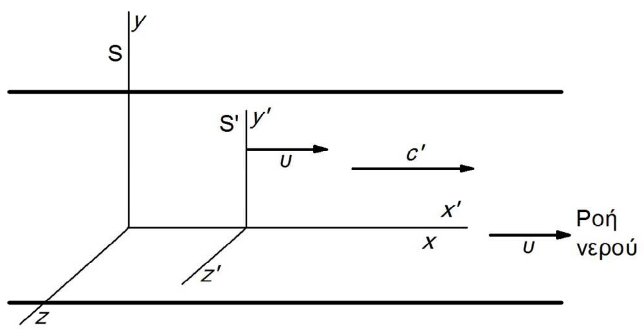
Παράγονται δύο σωματίδια συνολικής μάζας ηρεμίας $4m$, που κινούνται με την ίδια ταχύτητα $V = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

XX.3.24 Το 1851, ο Φιζώ μέτρησε την ταχύτητα του φωτός μέσα σε ένα μέσον (το νερό) που βρισκόταν σε κίνηση μέσα στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Θα θεωρήσουμε μια δέσμη φωτός που διαδίδεται μέσα σε μια στήλη νερού, το οποίο κινείται με ταχύτητα υ ως προς το εργαστήριο. Ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι ίσος με n και επομένως η ταχύτητα του φωτός ως προς το νερό είναι ίση με c/n, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.
(α) Δείξετε ότι η ταχύτητα του φωτός ως προς το εργαστήριο είναι ίση με

$$u = c\left(\frac{c + n\upsilon}{\upsilon + nc}\right)$$

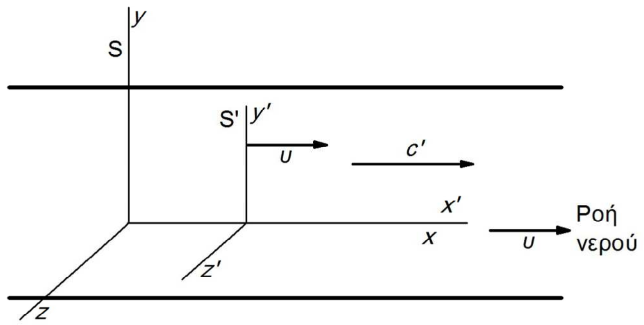
(β) Για μικρές ταχύτητες υ, δείξετε ότι η σχέση αυτή συμφωνεί, τουλάχιστον μέχρι και τον όρο της τάξης του υ/c, με την πρόταση της «παράσυρσης» του αιθέρα από το κινούμενο μέσον, που ο Φρενέλ είχε προτείνει για την ερμηνεία του αρνητικού αποτελέσματος των παρατηρήσεων του Αραγκό και η οποία ερμήνευσε επίσης τα αποτελέσματα των πειραμάτων του Φιζώ.

ΛΥΣΗ



(α) Θεωρούμε το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου ως το σύστημα S, μέσα στο οποίο το νερό κινείται με ταχύτητα υ. Θα συνδέσουμε με το κινούμενο νερό ένα σύστημα αναφοράς S΄, το οποίο, επομένως, κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S.

Η ταχύτητα του φωτός μέσα στο νερό και επομένως και ως προς το σύστημα S΄ είναι $\upsilon'_x = c' = c/n$.



Μετασχηματίζοντας, βρίσκουμε την ταχύτητα του φωτός ως προς το σύστημα του εργαστηρίου,

$$u = \upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon}{1 + \upsilon'_x \upsilon / c^2} = \frac{c' + \upsilon}{1 + c'\upsilon / c^2} = \frac{c / n + \upsilon}{1 + \upsilon / nc}$$

ή

$$u = c\left(\frac{c + n\upsilon}{\upsilon + nc} \right)$$

(β) Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί και ως $u = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + n\upsilon / c}{1 + \upsilon / nc} \right)$

η οποία, προσεγγιστικά, είναι ίση με

$$u \approx \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n\upsilon}{c}\right)\left(1 - \frac{\upsilon}{nc}\right) = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n\upsilon}{c} - \frac{\upsilon}{nc}\right) = \frac{c}{n} + \upsilon\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Αυτή είναι η σχέση που εξήγαγε ο Φρενέλ για να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα των πειραμάτων του Φιζώ. Μπορούμε, επομένως, να πούμε ότι τα πειράματα του Φιζώ επιβεβαιώνουν την πρόβλεψη της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, τουλάχιστον μέχρι και τον όρο της τάξης του υ / c .